מכפלה פנימית

## הערה

הגדרת המכפלה הפנימית תלויה בשדה, ולשדות שונים יכולות להיות הגדרות שונות.

# הגדרה

יהי V מ"ו מעל . פונקציה נקראת מכפלה פנימית(או מכפלה סקלרית או מכפלה אוקלידית) אם:

1. לינארית: לכל מתקיים
2. סימטרית: לכל מתקיים
3. לכל ו אם ורק אם

# דוגמאות

1. **נגדיר**:

## הערה

1. *.* ***נגדיר****:*
2. *פונקציות רציפות על עם ערכים ממשיים.  
    לכל (בגלל שf רציפה).*
3. *מרחב של Hilbert:   
   כך ש****נגדיר****:*

# הערות

1. *(מעל )*
2. *לכל*

# הגדרה

יהיו V מ"ו(מעל ) ו מכפלה פנימית. פונקציה מוגדרת ע"י נקראת נורמה(מוגדרת ע"י )

## דוגמה

,

אי שוויון קושי-שוורץ(Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

יהיו V מ"ו (מעל ) ו מכפלה פנימית. לכל מתקיים

# תוצאה

יהיו V, מכפלה פנימית. נורמה מקיימת:

1. ו אם ורק אם
2. ,
3. (אי שוויון המשולש):

## הערה

פונקציה שמקיימת

1. ו אם ורק אם
2. ,
3. (אי שוויון המשולש):

נקראת נורמה על V.

נוכיח ש היא נורמה שמושרת מ. אבל קיימות נורמות שאינן מתקבלות ממכפלה פנימית.

## דוגמה

# הוכחה ל

נוכיח . נתבונן ב

*⇦ כלומר יש לכל היותר שורש אחד ⇦ דיסקרימינטה היא לא חיובית:*

## הערה

באי שוויון של קושי-שוורץ מתקיים שוויון אם ורק אם u,v ת"ל.  
(בגלל שאז דיקסרימינטה היא 0 ⇦ קיים כך ש - .

# נוכיח ש:

## הערה

בגלל קושי-שוורץ: ⇦ קיים כך ש

מכפלה פנימית מעל (מכפלה הרמיטית)

# הגדרה

יהי V מ"ו מעל . פונקציה שמקיימת

1. לינאריות: לכל
2. הרמיטיות:
3. ו אם ורק אם

## הערה

לכל בגלל ש

נקראת מכפלה הרמיטית(Hermite)

# דוגמה()

## הערה